Clasa a VII-a

Soluţii

Problema 1

a) Dacă adăugăm cifrele 1 şi 2 avem: pe prima poziţie poate fi oricare dintre 1,2 sau 4.

Dacă prima poziţie este 1 sau 4 vom avea în fiecare caz 30 de posibilităţi.

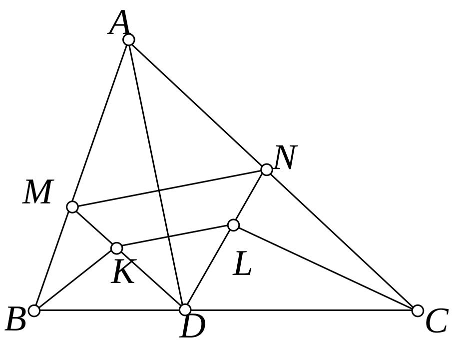
Dacă prima poziţie este ocupată de 2, avem 60 de posibilităţi, deci în total 120 de numere ce încep cu 1,2 sau 4.

b) Dacă adăugăm cifrele 0 şi 3, pentru fiecare din cele trei cifre nenule care pot ocupa poziţia 1, celelalte două se pot aşeza pe cele 5 locuri rămase în câte 20 de moduri; în total avem şi aici 60 de numere.

Numărul total căutat este, aşadar, $120 + 60 = 180$.

Punctaj recomandat: a) 5 puncte; b) 2 puncte.

Problema 2



În triunghiul ABD, K va fi centrul cercului înscris, deci $(AK$ va fi bisectoarea unghiului $\angle BAD$. Analog, în triunghiul ADC semidreapta $(AL$ va fi bisectoarea unghiului $\angle DAC$ (*).

Aplicăm teorema bisectoarei în triunghiurile AMD şi ANC pentru bisectoarele AK şi AL. Obţinem:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{MK}{KD} \text{ şi } \frac{AN}{AD} = \frac{NL}{LD} \qquad (**)$$

Avem $AM = AN$ dacă şi numai dacă $\frac{MK}{KD} = \frac{NL}{LD}$ dacă şi numai dacă $KL||MN$ (reciproca teoremei lui Thales).

Punctaj recomandat: (*) 2 puncte; (**) 3 puncte, finalizare: 2 puncte.

Problema 3

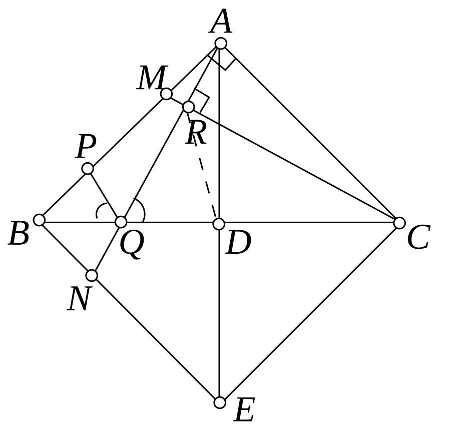
a) $n \in \mathbf{N}^*$ implică $\sqrt{n} \geq 1$, deci $1 + \sqrt{n} \geq 2$, adică $\sqrt{1 + \sqrt{n}} > 1$.

$\sqrt{1 + \sqrt{n}} < 2$ echivalent cu $1 + \sqrt{n} < 4$ echivalent cu $n < 9$, deci $A = \{1, 2, \ldots, 8\}$.

b) $|1-\sqrt{1+\sqrt{n}}| = \sqrt{1+\sqrt{n}}-1$. Avem $\sqrt{1+\sqrt{n}}-1 < 1/\sqrt{n}$ echivalent cu $\sqrt{1+\sqrt{n}} < \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, sau $1 < \frac{\sqrt{1+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$, sau $1 < \frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}$. Dacă $n \geq 3$ rezultă $\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$. Inegalitatea din enunţ este verificată pentru $n \in \{1,2\}$.

Punctaj recomandat: a) 3 puncte; b) 4 puncte.

Problema 4



In cazul ordonării de tipul $A-M-P-B$ (soluţia funcţionează şi în cazul $A-P-M-B$).

Fie E astfel încât $ABEC$ este pătrat al cărui centru este D şi $\{N\} = AQ \cap BE$.

a) $\Delta AMC \equiv \Delta NBA$ implică $AM = BN$ dar $AM = PB$. Prin urmare $PB = BN$. Cum $\angle ABC = \angle CBE$ şi QB este latură comună, rezultă $\Delta PQB = \Delta NQB$. Rezultă $\angle PQB = \angle NQB$ şi cum $\angle CQA = \angle NQB$ rezultă $\angle AQC = \angle PQB$.

b) Din asemănarea triunghiurilor ADQ şi NQB rezultă $\frac{DQ}{RQ} = \frac{AQ}{CQ}$ şi cum $\angle CQA$ este comun rezultă că triunghiurile DRQ şi ACQ sunt asemenea, deci unghiurile corespunzătoare sunt congruente, rezultă $m(\angle DRQ) = 45°$.

Punctaj recomandat: a) 4 puncte; b) 3 puncte.